

(8)

$m_A(x) = (x-2)(x-1)$ εφόσον ο A είναι διαγωνίσιμος.
Άρα $m_A(x) = x^2 - 3x + 2$

$m_A(A) = 0_{3 \times 3}$ Αναδομαστέ στο: $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_{3 \times 3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^2 - 3A = -2I_3 \Rightarrow A(A-3I) = -2I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A(A-3I)}{-2} = I_3$$

Άρα $A^{-1} = \frac{(A-3I)}{-2}$

1-6-2017

Άσκηση 9

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A^2 + a \cdot A + b \cdot I_n = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

(α) Αν $a^2 - 4b > 0$ Δ.0: A είναι διαγωνίσιμος

(β) Αν $a^2 - 4b < 0$ Δ.0 A όχι διαγωνίσιμος

(γ) Αν $a^2 - 4b = 0$ Δ.0: A διαγωνίσιμος αν $A = -\frac{a}{2} I_n$

(δ) Δ.0: αν $b \neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέφεται.

Εκφράστε τον A^{-1} συνάρτηση των πίνακων A και I_n

Λύση: Ο A μηδενίζει το πολυώνυμο $x^2 + ax + b \Rightarrow$ το ελάχιστο πολυώνυμο του A , (το $m_A(x)$) διαιρεί το $x^2 + ax + b$
 $m_A(x) \mid x^2 + ax + b$

(α): $a^2 - 4b > 0$ άρα το $x^2 + ax + b$ έχει δύο πραγματικές ρίζες $p_1 \neq p_2 \Rightarrow m_A(x) \mid (x-p_1)(x-p_2) \Rightarrow m_A(x) \in \{1, (x-p_1), (x-p_2), (x-p_1)(x-p_2)\}$

Σε κάθε πιθανή περίπτωση είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων
Αρα A διαγωνίσιμος

(β) $a^2 - 4b < 0 \Rightarrow x^2 + ax + b$ αναίρετο στο $\mathbb{R}$
 Ισχύει $m_A(x) / x^2 + ax + b \Rightarrow m_A(x) \in \{1, (x^2 + ax + b)\}$
 Προκύπτει $m_A(x) = x^2 + ax + b \Rightarrow$ όχι γινόμενο πρωτοβάθμιων $\Rightarrow$
 $\Rightarrow A$ όχι διαγωνίσιμος.

(γ) $a^2 - 4b = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = (x - p)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$
 $m_A(x) / (x - p)^2 \Rightarrow m_A(x) \in \{1, (x - p), (x - p)^2\}$
 και A διαγωνίσιμος αρα $m_A(x) = (x - p)$, με $p = -\frac{a}{2}$
 Είναι $m_A(A) = 0_{n \times n}$
 Αρα $A + \frac{a}{2} I_n = 0_{n \times n} \Rightarrow A = -\frac{a}{2} I_n$

(δ) $A^2 + aA = -bI_n \Rightarrow A(A + aI) = -bI_n \Rightarrow A \frac{(A + aI_n)}{-b} = I_n$

Αρα A αναστρέψιμος και $A^{-1} = \frac{-1}{b} A + aI_n$

Άσκηση 18

$b, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $P(x) = (x^{16} - 9x + b)(x - 3)^{2014}$ να μηδενίζεται
 από τον πίνακα
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Λύση: $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 3 & 1-x & -1 \\ -6 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 0 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 (3-x)$

Ισχύει $P(A) = 0 \Rightarrow$

Ισχύει $m_A(x) / \chi_A(x) = (1-x)^2 (3-x)$ αρα $m_A(x) \in \{(x-1)(x-3), (x-1)^2\}$

$$A \vee (A - 1I_3) (A - 3I_3) = A^2 - 3A - A - 3I_3 = A^2 - 4A - 3I_3 =$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 3}$$

Apa $m_A(x) = (x-1)(x-3)$
atau $P(A) = 0_{3 \times 3}$ core $m_A(x) / (x^{16} - 9x + b)(x-3)^{2017} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3) / (x^{16} - 9x + b)(x-3)^{2017} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{16} - 9x + b)(x-3)^{2016} = (x-1)Q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 9 + b)(-2)^{2016} = 0 \Rightarrow -8 + b = 0 \Rightarrow b = 8$$

1-6-17

9
14 Wpσ

αλκ 35/αλ. φ.

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T(x, y, z) = (y, ax + az, y)$$

Για ποίες τιμές του a δν διαγωνιοποιείται;

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ a & -x & x \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + ax + ax = -x(x^2 - 2a)$$

- 1) Έχει τις ίδιες ρίζες
- 2) Διαίρει το χαρακτηριστικό
- 3) Είναι φωνικό.

i) $a > 0$

$$\chi_A(x) = -x(x - \sqrt{2a})(x + \sqrt{2a})$$

$$\psi_A(x) = x(x - \sqrt{2a})(x + \sqrt{2a})$$

Α διαγωνιστικός, αφού το ελάχιστο πολυώνυμο $(\psi_A(x))$ είναι γινόμενο πρώτων βαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους.

$$a_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$a_2 = (2, 0, 1, 0)$$

$$a_3 = (-1, 0, 0, 1)$$

Gram-Schmidt

$$b_1 = a_1 \quad , \quad b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 \quad \dots \quad b_3 = \dots$$

$$r_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}$$

$$T: \vec{x}_1 \rightarrow \vec{r}_1$$

$$\vec{x}_2 \rightarrow \vec{r}_2$$

$$\vec{x}_3 \rightarrow \vec{r}_3$$

$$T(x, y, z)$$

$$= T(k\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 3\vec{x}_3)$$

$$= k\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 + 3\vec{r}_3$$

⑧ Βρείτε διά Ισοθεώρημα $T(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle) \rightarrow W$ με το δοσμένο
 εσωτερικό γινόμενο

όπου $W = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - 2z + w = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^4$

Ισοθεώρημα
 $\text{ou } b \rightarrow \text{ou } b (\text{δοσμένα})$

i) ou b τω $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 0) \quad \vec{a}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= (1, 0, 0) \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 \\ &= (0, 1, 0) - \frac{\langle (0, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle}{\langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle} \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, 1, 0) - \frac{0}{1} \cdot (1, 0, 0) = (0, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 -$$

$$- \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} \vec{b}_2 = (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle}{\langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle} \cdot (1, 0, 0) -$$

$$- \frac{\langle (0, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle}{\langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle} \cdot (0, 1, 0)$$

ou b τω W με το
 δοσμένο εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{\gamma}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = \dots$$

$$\vec{\gamma}_2 = \dots$$

$$\vec{\gamma}_3 = \dots$$

$$\begin{aligned} &x - y - 2z + w = 0 \\ &(1 \ -1 \ -2 \ 1 \mid 0) \end{aligned}$$

$$x = u + 2v - t$$

$$y = u$$

$$z = v$$

$$w = t$$

$$\dim W = 4 - \text{rank } A$$

$$\downarrow \text{διαφορά} = 4 - 1 = 3$$

$$\begin{aligned} W &= \{ (u + 2v - t, u, v, t) \mid \begin{matrix} u \\ v \\ t \end{matrix} \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Επειδή $\dim W = 3$

τα διανύσματα αυτά είναι βάση τω W .

iii) δεύτερη περίπτωση

$$\begin{aligned} \angle \vec{x}, \vec{x} &= x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_2^2 + 2x_3^2 \\ \text{εφαρμογή τετραγώνων} &\rightarrow = x_1^2 - 2x_1x_3 + \underline{x_3^2} + \underline{x_2^2} + 2x_2x_3 + \underline{x_3^2} + 3x_2^2 \\ &= (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Εάν } \angle \vec{x}, \vec{x} = 0 \Rightarrow (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

* Αν δώσουμε μια άλλη εφαρμογή τετραγώνων : (Πρόσθετοντας και
αφαιρώντας)

$$\angle \vec{x}, \vec{y} = x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$x^t A x > 0 \quad \text{για } x \neq 0$$

Ασκ. (23) / εν. φρον.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \underline{x_1 y_1} - \underline{x_1 y_3} - \underline{x_3 y_1} + \underline{x_2 y_3} + \underline{x_3 y_2} + \underline{4x_2 y_2} + \underline{2x_3 y_3}$$

(α) Δίνεται ότι $\langle , \rangle$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Πρέπει : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

i) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \underline{y_1 x_1} - \underline{y_1 x_3} - \underline{y_3 x_1} + \underline{y_2 x_3} + \underline{y_3 x_2} + \underline{4y_2 x_2} + \underline{2y_3 x_3} = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

Συμπέρασμα

ii) Διγραμμικότητα

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle = (a_1 + b_1)\gamma_1 - (a_1 + b_1)\gamma_3 - (a_3 + b_3)\gamma_1 + \\ + (a_2 + b_2)\gamma_3 + (a_3 + b_3)\gamma_2 + 4(a_2 + b_2)\gamma_2 + 2(a_3 + b_3)\gamma_3$$

$$= a_1 \gamma_1 + b_1 \gamma_1 + \dots$$

$$= (a_1 \gamma_1 - \dots) + (b_1 \gamma_1 + \dots)$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle$$

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda a_1 b_1 - \lambda a_1 b_3 + \dots$$

$$= \lambda (a_1 b_1 - a_3 b_3 - \dots) = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

ii) $a < 0$

$$\chi_A(x) = -x(x^2 - 2a)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\text{ανάγωγος} \quad \text{ανάγωγος} \quad \text{ανάγωγος}$

$$\Delta = 0^2 - 4(-2a) = 8a < 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο δεν είναι δυνατό να παραγοντοποιηθεί, άρα ο πίνακας ~~δεν είναι διαγωνιστός~~. Α δν είναι διαγωνιστός.

iii) $a = 0$

$$\chi_A(x) = -x^3$$

$$\mathcal{M}_A(x) \in \{x, x^2, x^3\}$$

Αν $\mathcal{M}_A(x) = x$, τότε A διαγωνιστός $\Rightarrow \mathcal{M}_A(A) = 0_{3 \times 3}$
 $\Rightarrow A = 0_{3 \times 3}$ αλλιώς $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 3x3

Αν $\mathcal{M}_A(x) = x^2$ ή $\mathcal{M}_A(x) = x^3$ τότε δν είναι διαγωνιστός.

~~η~~

~~Η~~ τ δν διαγωνιοποιείται για $a \leq 0$.

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \dots =$$

$$m_A(x) = x(x-1)$$

26) $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

* $A \neq I_2, B \neq -I_2$

* $A^3 - A^2 + A - I = 0_{2 \times 2}$

* $B^3 + B^2 + B + I = 0_{2 \times 2}$

0 A belongs to polynomial $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$$\Rightarrow m_A(x) \mid x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

$$m_A(x) \in \{ \cancel{x-1}, \cancel{x^2+1}, \cancel{(x-1)(x^2+1)} \}$$

$$m_A(x) \mid \overset{\substack{\uparrow \\ \text{basis}}}{\chi_A(x)} \Rightarrow \deg(m_A(x)) \leq 2 = \deg(\chi_A(x))$$

$m_A(x) \neq 1$ and $I_{2 \times 2} \neq 0_{2 \times 2}$

$m_A(x) \neq (x-1)(x^2+1)$ and $\deg m_A(x) \leq 2$

$m_A(x) \neq (x-1)$ (and or $m_A(x) = x-1$ to be $m_A(A) = 0$)

$$\Rightarrow A - I = 0$$

$$\Rightarrow A = I \text{ AToNo!}$$

Opao $\boxed{m_A(x) = x^2 + 1}$ ✓

$$\chi_A(x) = x^2 + 1 = \chi_B(x)$$

Obaio $\boxed{m_B(x) = x^2 + 1}$

$$= \lambda_1 (P(x, y))^2 + \lambda_2 (Q(x, y))^2$$

$$Q = 2x'^2 + y'^2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} x + 1/\sqrt{2} y \\ -1/\sqrt{2} x + 1/\sqrt{2} y \end{pmatrix}^2$$

$$Q(x, y) = 1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \right)^2$$

32 / Ε.Π.Φ.

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

* βαθμός 2

* ιδιοτιμές 0, 2, 1

* ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\dim(V(0)) = 3 - \text{rank } A = 3 - 2 = 1$$

Άρα και η αντιστροφή πολλαπλασιασμού με 0 είναι 1.

$$w_A(x) = j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

αντιστροφή του αντιστροφού (P^{-1}) .

05K. (9) / εν. φ.

$$Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q(x, y) = 2xy$$

0 niveaus A ens tetragynvius hoptis Q gives 0
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ιδιοτιτες $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$$N(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \mid (A - 1I)x = 0_{2 \times 1} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x-y=0 \\ x=y \end{array}$$

$$N(-1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \mid (A + I)x = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad x+y=0$$

φασβατινι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

απολογισμος